

# Las transformaciones semióticas para analizar estrategias de solución de problemas de interpretación y representación\*

Semiotic transformations to analyze interpretation and representation problem solving strategie  
 Transformações semióticas para analisar estratégias de resolução de problemas para interpretação e representação.

DOI: <https://doi.org/10.21803/penamer.17.33.602>

## Jesús David Berrio Valbuena

<http://orcid.org/0000-0002-4014-5322>

PhD. (e) en Educación Matemática Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Docente tiempo completo Universidad del Atlántico, [jberriovalbuena@mail.uniatlantico.edu.co](mailto:jberriovalbuena@mail.uniatlantico.edu.co)

## Sonia Valbuena Duarte

<https://orcid.org/0000-0003-3667-1087>

PhD. (c) en Matemáticas, Docente Universidad del Atlántico, [soniavalbuena@mail.uniatlantico.edu.co](mailto:soniavalbuena@mail.uniatlantico.edu.co)

## Rafael Sánchez Anillo

<https://orcid.org/0000-0002-8924-055>

PhD. en Educación, Docente tiempo completo Universidad del Atlántico, [rafaelsanchez@mail.uniatlantico.edu.co](mailto:rafaelsanchez@mail.uniatlantico.edu.co)

## Resumen

**Introducción:** La teoría de registro de representaciones semióticas establece que el uso de sistemas de signos que permiten las actividades cognitivas de formación, conversión y tratamiento son esenciales para tener acceso a los objetos o procesos matemáticos. **Objetivo:** Esta investigación tiene como objetivo analizar estrategias utilizadas por estudiantes de grado 11 para resolver problemas de interpretación y representación mediante las actividades de tratamiento y conversión. **Metodología:** Se seleccionó un cuestionario con preguntas del tipo pruebas Saber en el que se evalúa la competencia de interpretación y representación. Asimismo, para poner de manifiesto qué hace y dice cada estudiante cuando responde las preguntas, se realizan videograbaciones y transcripciones. **Resultados:** Se plantea un análisis *a priori* por pregunta para analizar e interpretar las actividades cognitivas de tratamiento y conversión empleadas por los estudiantes, así como un análisis *a posteriori* para analizar los resultados obtenidos y verificar las hipótesis planteadas. **Conclusiones:** Se muestra cómo los estudiantes asocian las unidades significantes de un problema planteado en un registro de representación a otro registro, para encontrar, bien un contraste de la información, bien una relación en la información, en atención a la correspondencia y la univocidad semántica.

**Palabras clave:** Conversión; Interpretación y representación; Tratamiento; Representaciones semióticas

## Abstract

**Introduction:** The theory of registration of semiotic representations establishes that the use of sign systems, which allow the cognitive activities of formation, conversion and treatment, is essential to have access to mathematical objects or processes. **Objective:** This research aims to analyze the strategies used by eleventh-grade students to solve problems of interpretation and representation through treatment and conversion activities. **Methodology:** A questionnaire was selected with questions of the type Saber tests, in which the competence of interpretation and representation is evaluated. Also, to show what each student does and says when answering the questions, video recordings and transcriptions are made. **Results:** An *a priori* analysis is proposed per question, to analyze and interpret the cognitive treatment and conversion activities used by the students, as well as an *a posteriori* analysis where the results obtained are analyzed and the hypotheses are verified. **Conclusions:** It shows how students associate the significant units of a problem posed in a representation register to another register, to find either a contrast of the information or a relationship in the information, taking into account the semantic correspondence and semantic univocity.

**Keywords:** Conversion; Interpretation and representation; Treatment; Semiotic representations.

## ¿Cómo citar este artículo?

Berrio; J., Valbuena; S. y Sánchez; R. (2024). Las transformaciones semióticas para analizar estrategias de solución de problemas de interpretación y representación. *Pensamiento Americano*, e#602. 17(33), 1-13. DOI: <https://doi.org/10.21803/penamer.17.33.602>

\* Los términos clave han sido recuperados a partir del Tesauro Europeo de la Educación (2023). <https://www.vocabularyserver.com/tec/es/index.php?tema=2173>



## Resumo

**Introdução:** A teoria de registro das representações semióticas afirma que o uso de sistemas de sinais que permitem as atividades cognitivas de formação, conversão e processamento é essencial para acessar objetos ou processos matemáticos. **Objetivo:** Esta pesquisa tem como objetivo analisar as estratégias utilizadas por alunos da 11ª série para resolver problemas de interpretação e representação por meio de atividades de processamento e conversão. **Metodologia:** Foi selecionado um questionário com perguntas do tipo teste Saber, no qual é avaliada a competência de interpretação e representação. Também foram feitas gravações e transcrições de vídeo para mostrar o que cada aluno faz e diz ao responder às perguntas. **Resultados:** Propõe-se uma análise *a priori* por questão para analisar e interpretar o processamento cognitivo e as atividades de conversão empregadas pelos alunos, bem como uma análise *a posteriori* para analisar os resultados obtidos e verificar as hipóteses apresentadas. **Conclusões:** É demonstrado como os alunos associam as unidades de significado de um problema apresentado em um registro de representação a outro registro, a fim de encontrar um contraste de informações ou uma relação nas informações, com atenção à correspondência e à univocidade semântica.

**Palavras-chave:** conversão; interpretação e representação; processamento; representações semióticas.



## Introducción

En la actualidad, el aprendizaje de las matemáticas supone uno de los aprendizajes fundamentales de la educación elemental, dado el carácter instrumental de estos contenidos, en este contexto Peña Ubarne y Berrío Valbuena (2022, 2023) y Valbuena Duarte et al. (2020) explican que comprender las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se ha convertido en una preocupación para buena parte de los profesionales dedicados al mundo de la educación. Esto es especialmente relevante si se considera el alto porcentaje de fracaso que se registra en estos contenidos entre los alumnos y alumnas que finalizan la escolaridad obligatoria. Los estudiantes muestran debilidades cuando se les pide expresar, interpretar, representar y evaluar ideas matemáticas, eso lo prueban el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (Icfes) y el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA, por sus siglas en inglés), exponiendo el preocupante nivel de desempeño en el área de matemáticas en la que existe mayor concentración en los niveles mínimos e insuficientes, ubicando el 70 % de los estudiantes en estos dos niveles (Icfes, 2018; Sánchez, 2023; Subdirección de Calidad y Pertinencia Dirección de Evaluación de la Educación Secretaría de Educación del Distrito, 2014).

La mayoría de las dificultades se ubican específicamente en problemas en los que es necesaria la conversión del registro de la lengua natural al algebraico o del registro gráfico al verbal, tal como lo manifiestan distintas investigaciones: Berrío Valbuena et al. (2020), Duval (1991, 1999, 2000, 2004, 2006, 2011), Iori (2017), Kataoka et al. (2022), Lemos Florez y Herrera Ruiz (2015), McGee y Martínez-Plannell (2014), Morales Martínez (2013), Ospina García (2012) y Valbuena Duarte et al. (2021). Estos autores presentan una descripción amplia sobre algunas dificultades que presentan los estudiantes para interpretar ideas importantes a la hora de resolver una situación problema.

Para atender a estas y otras dificultades encontradas en la interpretación y representación de situaciones problema escritas tanto en lenguaje natural como en otro registro de representación, surge la necesidad de estudiar desde un punto de vista semiótico las actividades de tratamiento y conversión de problemas matemáticos escritos en los diferentes registros de representación.

La teoría de registro de representaciones semióticas proporciona elementos que permiten analizar los procesos de solución utilizados en la resolución de una situación problema en matemáticas, las transformaciones y el papel que desempeñan en la comprensión de estas (Berrío Valbuena et al., 2020; Charris y Muñoz, 2019). De acuerdo con lo anterior, el propósito de esta investigación es analizar las estrategias que utilizan los estudiantes de grado 11 para resolver problemas de interpretación y de representación, tal y como se plantean en las pruebas Saber, a través de las actividades de tratamiento y conversión de representaciones semióticas, en relación con los criterios de congruencia correspondencia semántica y univocidad semántica.

## Marco teórico

La elección de un determinado registro de representación de un objeto matemático o una información dada suele ser clave para su comprensión. A continuación, se presentan los tipos de registros de representación, entre las cuales están el registro verbal o lengua natural, registro numérico, registro figural-icónico, registro tabular, registro algebraico, registro gráfico y registro geométrico. El aprendi-



zaje de las matemáticas incluye un análisis de procesos cognitivos como la interpretación, estos procesos requieren la utilización de diferentes registros de representación de los del lenguaje natural, ya sea algebraico, geométrico o gráfico.

Para Duval (1999, 2000, 2011), un sistema semiótico, es decir, un sistema de signos y un sistema de representación son cosas diferentes, de modo que, para que un sistema semiótico sea un sistema de representación, debe permitir las siguientes tres actividades cognitivas:

- **Formación:** Es un recurso de signos para actualizar la mirada de un objeto o de representaciones en un registro semiótico, sirve para expresar una representación mental o para evocar un objeto real.
- **Tratamiento:** Es la transformación de una representación inicial en otra representación terminal de una cuestión o problema en un mismo registro de representación. El tratamiento es una transformación estrictamente interna en un registro, es decir, no se cambia el sistema de signos en el cual está expresada la representación; por tanto, ocurre con las únicas reglas propias de dicho sistema semiótico.
- **Conversión:** Es la transformación de la representación de un objeto matemático o una información dada de un registro semiótico a otro. Un tratamiento se mueve en un mismo registro de representación, lo contrario ocurre en la conversión, que hace pasar de un registro a otro.

Entre la conversión y el tratamiento es necesario precisar que cognitivamente son independientes una del otro, aunque matemáticamente la primera depende del segundo. Por tanto, la conversión de una representación es el primer paso en la comprensión de un objeto o proceso matemático y, por ende, en el aprendizaje de las matemáticas.

Para Duval (2006), cambiar la representación de objetos o relaciones matemáticas de un sistema semiótico a otro es siempre un salto cognitivo. A diferencia del tratamiento, no hay reglas ni asociaciones básicas, como entre palabras e imágenes en el lenguaje cotidiano, para este tipo de transformación de representación, la conversión no se reduce, pues, a una codificación.

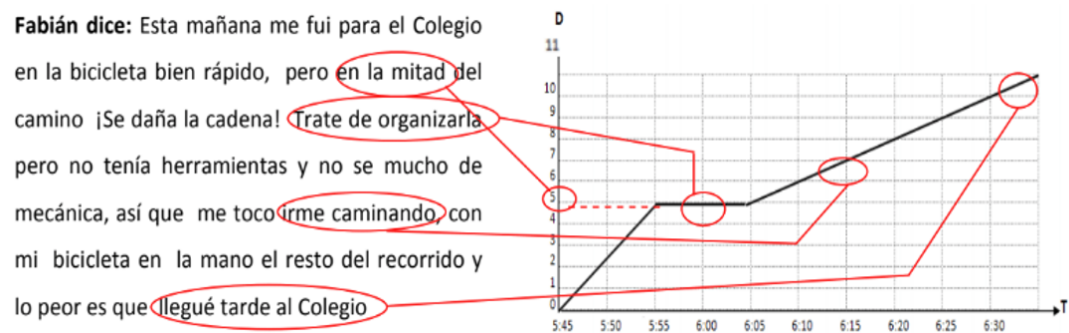
La correspondencia semántica de los elementos significantes es definida por Duval (1999) como la asociación de cada unidad signifiante simple del registro de representación de partida con cada una de las unidades significantes elementales del registro de representación de llegada. Y la univocidad semántica terminal está definida como la asignación a cada unidad signifiante elemental del registro de representación de partida una única unidad signifiante elemental en el registro de la representación de llegada. Se entienden como unidades significantes los elementos o las características que pueden tomar las diferentes variables en cada registro de representación.

En el siguiente ejemplo (figura 1), se puede observar la relación de las unidades significantes en el registro de lengua natural y el gráfico, así como la correspondencia semántica y la univocidad semántica de estas.



**Figura 1.**

*Unidades significantes y correspondencia entre el registro verbal y el registro gráfico.*



*Fuente:* Adaptado de Ospina García (2012).

Este estudio pretende mostrar cómo los estudiantes asocian las unidades significantes de un problema planteado en un registro de representación a otro registro, para encontrar, bien un contraste de la información, bien una relación en la información. Siendo más específicos, analizará de manera práctica cómo el estudiante transforma la información que está representada a otra representación, que le permita tener una respuesta de forma rápida y correcta en el momento de extraer información relevante de la situación problema planteada en el registro de partida (unidades significantes) y de qué manera relacionan esta información con el registro de llegada (correspondencia semántica), es decir, se espera que los estudiantes sean capaces de interpretar la información proporcionada en las situaciones planteadas y hagan transformaciones en los diferentes registros de representación semiótica.

## Metodología

Este estudio tiene un enfoque cualitativo (Martínez, 2006) y sigue una estrategia clínica de investigación en educación matemática (Camargo Uribe, 2019), “en razón de que facilita la construcción de diseños investigativos del mundo empírico, permitiendo a los investigadores conectar sus supuestos teóricos con formas específicas de obtener información para analizarla” (p. 2). Se implementó un contraste de análisis *a priori* y *a posteriori*. Para Orús y Pitarch (2004), los análisis *a priori* y *a posteriori* aportan una información más completa y matizada sobre la realidad del tratamiento de la información. Los análisis *a priori* admitirán establecer hipótesis sobre las estrategias que usaría el individuo que resuelve el problema planteado, es decir, permite poner de manifiesto las relaciones *a priori* entre las variables en función de sus características y contrastarlas con el resultado de la experimentación. Por otro lado, los análisis *a posteriori* determinarán en qué medida los resultados de la experimentación pueden explicarse en función de los criterios de las cuestiones establecidos en los análisis *a priori*.

## Recolección de la información

En este estudio, se les aplicó un cuestionario a tres estudiantes de grado 11 de una institución educativa pública de Barranquilla. Los cuestionarios son conjuntos de preguntas utilizados para estudiar un problema señalando ciertos aspectos de este, estas preguntas pueden ser cerradas o abiertas (Her-



nández Sampieri et al., 2010). Las preguntas cerradas establecen opciones de respuesta delimitadas, representan las posibilidades de elección de respuesta a los participantes y, por tanto, las categorías también serán limitadas. Por otro lado, las preguntas abiertas no establecen límites a la respuesta, por lo cual el número de categorías de respuesta es indeterminado y es susceptible de variación de acuerdo con la población que responde. Dadas las consideraciones anteriores, se seleccionaron preguntas en atención a las características de las pruebas Saber diseñadas por el Icfes. El cuestionario fue dividido en tres secciones, las cuales contienen tres preguntas cada una, y se mostrarán los análisis realizados a las estrategias de solución de una pregunta cerrada.

Por otro lado, para poner de manifiesto qué hace y qué dice cada estudiante, se implementan como instrumento de recolección de información las videograbaciones y las transcripciones.

### ***Videograbaciones***

Para Rich y Hannafin (2009), las videograbaciones, por ser herramientas audiovisuales, les permiten a los investigadores documentar los contenidos conceptuales, procedimentales y estratégicos de los alumnos o evaluar aspectos como capacidad de comunicación, interpretación, análisis, creatividad, innovación. Entre sus características principales, se encuentran la potencialidad expresiva, es decir, en la que el alumno explica el trabajo realizado y da muestra de los conocimientos adquiridos. De esta manera, las grabaciones de videos fueron utilizadas en la solución de las situaciones problema de forma personalizada, con el objetivo de registrar los procesos de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas que realizaba cada estudiante.

### ***Transcripciones***

De acuerdo con Sánchez Gómez y Revuelta Domínguez (2005) y Strauss (1987), cuando los datos en una investigación se han registrado utilizando medios audiovisuales, su transcripción es un paso necesario para su interpretación, ya que permiten informar ampliamente sobre la naturaleza y el propósito de un estudio. De esta manera, las transcripciones realizadas sobre las videograbaciones en esta investigación permitieron analizar las estrategias de solución que utilizaban los estudiantes en la identificación de las unidades significantes y los procesos que realizaban al hacerlas corresponder en los diferentes registros de representación, proporcionando una amplia visión sobre el objetivo de este estudio.

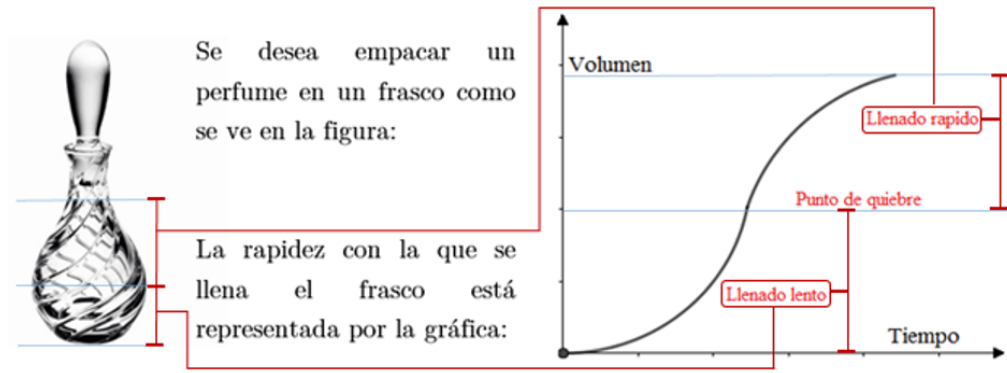
### ***Resultados***

La siguiente pregunta cerrada se propuso durante una de las secciones del cuestionario aplicado, se espera que los alumnos no tengan problemas en establecer una relación directa entre las variables intervinientes en los registros figural (registro de partida) con las del registro gráfico (registro de llegada), delimitando cada unidad significativa del registro de partida y lo haga corresponder con su correspondiente unidad en el registro de llegada, realizando la actividad cognitiva de conversión. Con ello, se busca conocer si los estudiantes pueden transitar entre registros de representación (figura 2).



**Figura 2.**

*Conversión del registro figural al registro gráfico.*



Fuente: Elaboración propia.

### ***Hipótesis del análisis a priori***

El estudiante, al observar el dibujo, logra darse cuenta de que el llenado del frasco de perfume está dividido en dos intervalos o momentos, los cuales están separados por un punto de quiebre.

En el primer intervalo, el llenado va de una superficie circular pequeña a una superficie circular grande, esto quiere decir que con el transcurrir del tiempo el volumen subirá lentamente, debido a la forma del frasco de perfume en este intervalo.

Asimismo, luego de finalizar el primer intervalo y comenzar el segundo, el volumen pasa de subir lentamente a ir rápido, debido a que va de una superficie circular grande a una superficie circular pequeña; por tanto, en el comienzo de la gráfica, el llenado es lento mientras después del punto de quiebre es rápido.

### ***Análisis a posteriori***

Los resultados que se obtuvieron a partir de la implementación del cuestionario propuesto se describirán mediante un análisis detallado, resaltando los principales hallazgos en las estrategias de solución de cada uno de los tres estudiantes participantes.

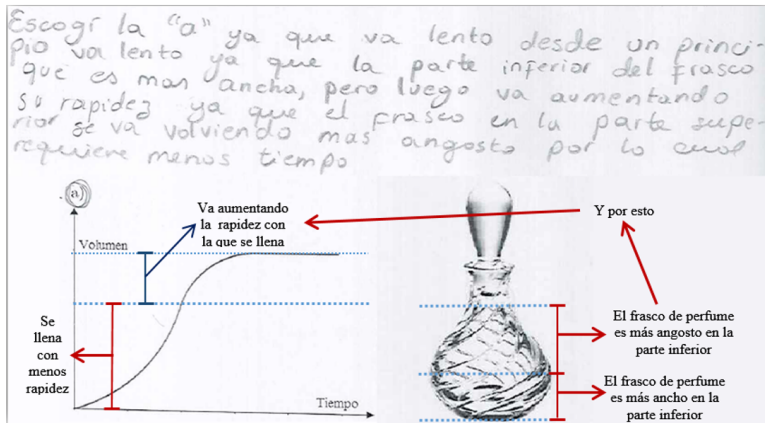
El estudiante 1 dice: “Como la figura del perfume es más ancha en la parte inferior por lo cual se llenará con menos rapidez y luego va aumentando su rapidez debido a que en la parte superior se va volviendo más angosto, por lo que requiere menos tiempo para llenarse” (figura 3).





**Figura 3.**

*Respuesta del estudiante 1*



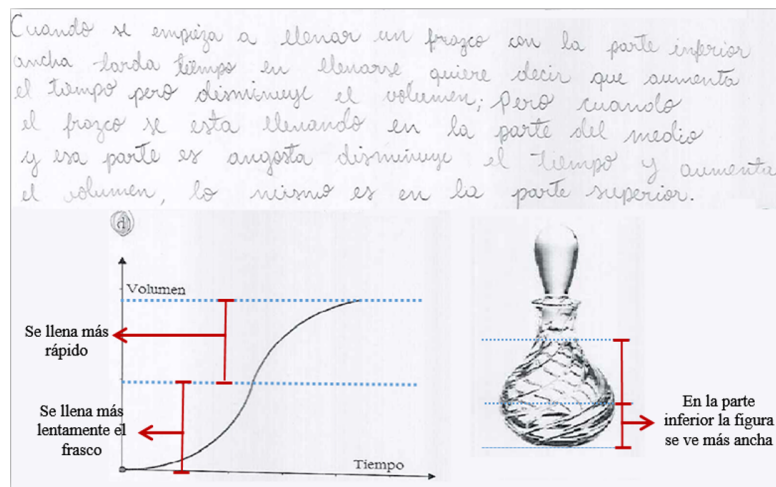
Fuente: Elaboración propia.

El estudiante 1 identifica las unidades significantes del primer y segundo momento: “menos rapidez”, “va aumentando su rapidez”, pero no identifica o señala el punto de quiebre (línea punteada azul). Además, no logra realizar conversión de la unidad significante del segundo momento al registro gráfico, seguidamente coloca en correspondencia la unidad significante del primer momento, pero se confunde al segmentar la unidad significante del segundo momento al registro gráfico, lo cual está señalado con azul, tampoco logra segmentar el punto de quiebre en ambos registros; por otra parte, como no tiene correspondencia semántica la unidad significante del segundo momento debido a que en ambos registros no significan lo mismo, por tanto, no existe univocidad semántica.

De igual forma, el estudiante 2 dice: “En la parte inferior de la figura se ve más ancha, por eso demora más tiempo en llenarse, pero su volumen va a ser menor, es decir, se llena más lentamente el frasco, pero en la parte del medio demora menos tiempo y tiene más volumen, o sea, se llena más rápido, lo mismo en la parte superior” (figura 4).

**Figura 4.**

*Respuesta del estudiante 2*



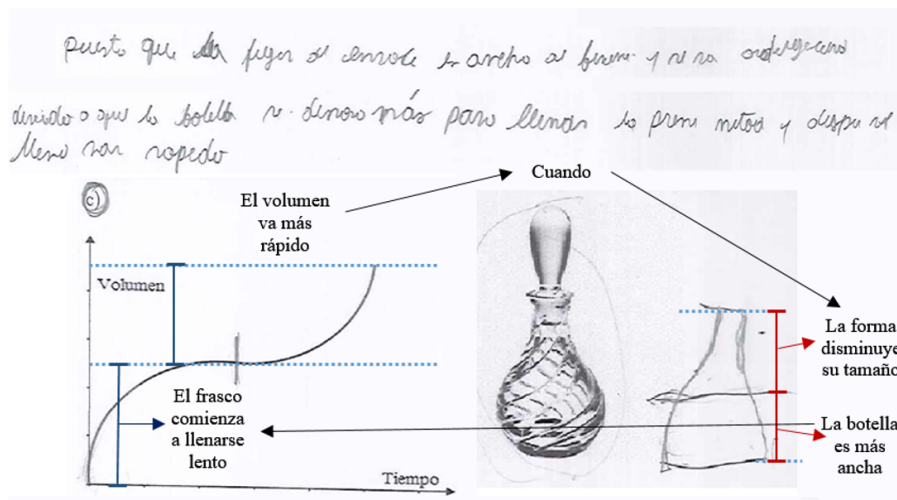
Fuente: Elaboración propia.



El estudiante 2 identifica las unidades significantes, se da cuenta de que, por la forma de la parte inferior, el frasco se llenará lento, lo contrario de la parte superior, la cual se llenará rápido; sin embargo, tiene algo de confusión en la interpretación de la información debido a que menciona que el tiempo aumenta o disminuye, cuando el tiempo transcurre de manera constante, siendo este tipo de dificultad uso incorrecto del lenguaje. Luego de hacer conversión, toma las unidades significantes del registro de partida y las pone en correspondencia con las del registro de llegada. Por otro lado, sí existe univocidad semántica debido a que a cada unidad significativa del registro de partida le corresponde una unidad en el registro de llegada.

Por su parte, el estudiante 3 dice: “Teniendo en cuenta la figura del frasco entonces al comienzo se comienza a llenar lento hasta que llega al punto en la botella donde se comienza a cerrar por la tapa, entonces la gráfica del frasco se dividiría en 2 momentos, el cual sería en el que tarda en llenar que sería cuando la botella es ancha y luego cuando el volumen avanza más rápido que sería cuando la forma disminuye su tamaño” (figura 5).

**Figura 5.**  
Respuesta del estudiante 3



Fuente: Elaboración propia.

El estudiante 3 identifica las unidades significantes del primer y segundo momento, las cuales son donde “el llenado es lento” y “avanza rápido”, así como identifica señalando el punto de quiebre que divide en dos momentos el ejercicio, pero no realiza la debida conversión de estas en el registro gráfico, igualmente, no hay correspondencia semántica entre las unidades significantes del primer y segundo momento, como resultado de invertir el orden en la segmentación; por consiguiente, entre las unidades significantes de ambos registros no existe univocidad semántica, debido a que las dos unidades significantes encontradas en el registro figural y las unidades expresadas en el registro gráfico no significan lo mismo en ambas representaciones.



## Discusión

### *Análisis a posteriori global*

En esta sección, se proporciona un análisis de forma general de lo que sucedió en el anterior proceso en atención a dos criterios de congruencia y se verificará si se cumplieron las hipótesis planteadas por los investigadores. Se considerarán las siguientes siglas para el presente análisis:

CS: correspondencia semántica; US: univocidad semántica; RG: registro gráfico; RF: registro figural.

CS: No, los estudiantes muestran dificultad para segmentar las unidades significantes del registro de partida (RF) con las unidades significantes del registro de llegada (RG).

US: No, los estudiantes logran identificar las unidades significantes del registro de partida (RF), pero se les dificulta hacerlas corresponder con el registro de llegada (RG).

En el momento de hacer la conversión del registro figural al registro gráfico, dos de los estudiantes identifican las unidades significantes del registro de partida (RF), pero se les dificulta hacerlas corresponder con las unidades significantes del registro de llegada (RG), realizando una solución errada al problema planteado, debido a que las unidades significantes encontradas en el registro figural y las unidades expresadas en el registro gráfico no significan lo mismo en ambas representaciones.

## Conclusiones

El objetivo general de esta investigación fue analizar las estrategias que utilizan los estudiantes de grado II para resolver problemas de interpretación y de representación mediante las actividades de tratamiento y conversión de representaciones semióticas. En los resultados obtenidos, se observa que los estudiantes utilizaron como estrategia para dar solución a la situación planteada en el registro figural al registro gráfico la identificación de las unidades significantes, para luego ponerlas en correspondencia en los otros registros de representación, aunque se debe resaltar que excluían algunas unidades significantes, lo cual los condujo a obtener resultados errados.

En atención a que para Duval (2004) un aprendizaje centrado en la transformación de unas representaciones en otras permite obtener nueva información y propiedades, extraer nuevos conocimientos de los objetos, las ideas y los conceptos representados, las actividades cognitivas de tratamiento y conversión utilizadas por los estudiantes les permitieron comprender e interpretar la información planteada.

Se encontraron dos grandes dificultades asociadas a la solución de preguntas cerradas tipo pruebas Saber que evalúan la competencia de interpretación y representación:

- Los estudiantes tienen dificultades para asociar información del registro figural con el registro gráfico, debido a que se les instruye en el aula de clases a resolver situaciones de una manera algorítmica. Y en el momento de utilizar las distintas representaciones se les dificulta coordinar e integrar la información.



- Cuando los estudiantes se enfrentan a las pruebas Saber, presentan problemas para obtener una respuesta de forma rápida, sabiendo que cuentan con uno o dos minutos para responder cada pregunta y que el tiempo implementado para responder esta pregunta excede ampliamente el tiempo estándar de respuesta.

Los hallazgos de este trabajo ofrecen un aporte empírico a la formación en competencias de los estudiantes de la educación media en cuanto al abordaje y resolución de preguntas de opción múltiple, así como la identificación del uso de modelos de enseñanza y evaluación alternos al enfoque tradicional del estudio de las matemáticas (Berrío Valbuena et al., 2017). Del mismo modo, permite reconocer la importancia de los postulados de la teoría de registros de representación semiótica para desarrollos de estrategias de enseñanza, aprendizaje y evaluación que atiendan a los retos que proponen los resultados de las pruebas estandarizadas nacionales e internacionales (Valbuena Duarte et al., 2021).



## Referencias

- Berrio Valbuena, J. D., González Roca, A., Meriño Mendoza, V. A. y Valbuena Duarte, S. (2020). ¿Cómo interpretan noticias sobre el covid-19 los estudiantes de un programa de formación de profesores de matemáticas? En J. Solorzano Movilla y D. Suárez López (comps.), *Miradas y perspectivas de la educación matemática desde la formación, la inclusión y la tecnología* (pp. 146-173). Sello Editorial Coruniamericana. <https://repositorio.americana.edu.co/entities/publication/7cc1477e-c900-489e-9ba4-489c93d-9f2b3>
- Berrio Valbuena, J. D., Valbuena Duarte, S. y Sánchez Anillo, R. (2017). Simulación de composición de simetrías en Geogebra para simplificar la teoría de los diamantes en la práctica del billar. *Revista Pensamiento Americano*, 10(19), 55-67. <https://doi.org/10.21803/pensam.v10i19.29>
- Camargo Uribe, L. (2019). Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática [conferencia]. *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Medellín, Colombia*. <https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/1061/568>
- Charris, M. y Muñoz, C. (2019). *Transformaciones semióticas en la resolución de problemas de interpretación y representación en estudiantes de undécimo grado* [tesis de grado, Universidad del Atlántico].
- Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22(3), 233-261. <https://doi.org/10.1007/BF00368340>
- Duval, R. (1999). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo*. Universidad del Valle.
- Duval, R. (2000). Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 20(2), 135-170.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.
- Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española.
- Duval, R. (2011). *El aprendizaje del álgebra y el problema cognitivo de la designación de objetos*. Universidad del Valle.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, M. del P. (2010). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill.
- Hoyos Estrada, S. . (2019). La influencia de los discounter en el cambio de hábitos de consumo de los colombianos. *Ad-Gnosis*, 8(8). <https://doi.org/10.21803/adgnosis.v8i8.366>
- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. (2018). *Guía introductoria al diseño centrado en evidencias*. <https://www.icfes.gov.co/documents/39286/443287/Guia+introdutoria+al+Diseno+Centrado+en+Evidencias.pdf>
- Iori, M. (2017). Objects, signs, and representations in the semio-cognitive analysis of the processes involved in teaching and learning mathematics: A Duvalian perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 94(1), 275-291. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9726-3>
- Kataoka, Y., Carvalho, A. y Borim, C. (2022). The concept of chance in early childhood education: An analysis from the perspective of the register of semiotic representations. *Statistics Education Research Journal*, 20(2), 1-19. <https://doi.org/10.52041/serjv20i2.318>
- Lemos Florez, K. y Herrera Ruiz, N. D. (2015). *Análisis del proceso de conversión de problemas escritos en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales* [tesis de grado, Universidad del Valle]. <https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/server/api/core/bitstreams/57d54342-75c8-4acd-9ca5-dd238c6d493f/content>
- Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (síntesis conceptual). *Revista de Investigación en Psicología*, 9(1), 123-146



- McGee, D. L. y Martínez-Planell, R. (2014). A study of semiotic registers in the development of the definite integral of functions of two and three variables. *International Journal of Science and Mathematics Education, 12*, 883-916. <https://doi.org/10.1007/s10763-013-9437-5n>
- Morales Martínez, Z. E. (2013). *Análisis de las transformaciones de las representaciones: Semióticas en el estudio de la función logarítmica en la educación escolar* [tesis de maestría, Universidad Católica del Perú]. [https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/4639/MORALES\\_MARTINEZ\\_ZENON\\_ANALISIS\\_ESCOLAR.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/4639/MORALES_MARTINEZ_ZENON_ANALISIS_ESCOLAR.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- Orús, P. y Pitarch, I. (2004). *Análisis didáctico de un cuestionario en el marco de la teoría de las situaciones*. En Actas del VIII Simposio de Investigación en Educación Matemática.
- Ospina García, D. (2012). Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal [tesis de maestría, Universidad Autónoma de Manizales]. [https://repositorio.autonoma.edu.co/bitstream/11182/477/4/Representaciones\\_semi%20c3%b3tica\\_aprendizaje\\_concepto\\_funcional\\_lineal.pdf](https://repositorio.autonoma.edu.co/bitstream/11182/477/4/Representaciones_semi%20c3%b3tica_aprendizaje_concepto_funcional_lineal.pdf)
- Peña Ubarne, Z. F. y Berrío Valbuena, J. D. (2022). Creencias acerca de las matemáticas y su aprendizaje en la modalidad virtual en tiempos de pandemia de covid-19 en estudiantes de bachillerato. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 100*(1), 7-24. <https://redined.educacion.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/242190/Documento%201.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Peña Ubarne, Z. F. y Berrío Valbuena, J. D. (2023). Desmitificar las matemáticas: Cómo las creencias afectan el proceso de enseñanza-aprendizaje y qué estrategia podemos seguir. En A. M. Rosas Mendoza (ed.), *Avances en matemática educativa el alumno desde la teoría N° 14* (pp. 33-47). *Lectorum*. <https://www.cicata.ipn.mx/assets/files/cicata/ProME/docs/Archivos/ProgramaEditorial/AvaME/AMEANo11.pdf>
- Rich, P. J. y Hannafin, M. (2009). Video annotation tools: Technologies to scaffold, structure, and transform teacher reflection. *Journal of Teacher Education, 60*(1), 52-67. <https://doi.org/10.1177/0022487108328486>
- Sánchez G., V. (2023, 2 de enero). Colombia se ha mantenido en últimos lugares de prueba Pisa en recientes ediciones. *La República*. <https://www.larepublica.co/globoeconomia/colombia-se-ha-mantenido-en-los-ultimos-puestos-de-la-prueba-pisa-durante-ultimas-ediciones-3517806>.
- Sánchez Gómez, M. C. y Revuelta Domínguez, F. I. (2009). El proceso de transcripción en el marco de la metodología de investigación cualitativa actual. *Enseñanza & Teaching: Revista Interuniversitaria de Didáctica, 23*, 367-386.
- Strauss, A. (1987). *Qualitative analysis for social scientists*. Cambridge University Press.
- Subdirección de Calidad y Pertinencia Dirección de Evaluación de la Educación Secretaría de Educación del Distrito. (2014). Análisis descriptivo y pedagógico de los resultados de las pruebas Saber 3º, 5º y 9º (2009, 2012 y 2013) y Saber 11 (2014) <https://repositorioseducacionbogota.edu.co/server/api/core/bitstreams/40de8f4b-d100-4523-9253-77dbde1230df/content>
- Valbuena Duarte, S., Muñiz Márquez, L. E. y Berrío Valbuena, J. D. (2020). El rol del docente en la argumentación matemática de estudiantes para la resolución de problemas. *Revista Espacios, 41*(9), 1-15. <https://w.revistaespacios.com/a20v41n09/a20v41n09p15.pdf>
- Valbuena Duarte, S., Tamara Gutiérrez, Y. y Berrío Valbuena, J. (2021). Intervención didáctica tecnológica para el estudio de las secciones cónicas basada en el potencial semiótico. *Formación Universitaria, 14*(1), 181-194. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062021000100181>



