Recibido: 05/07/24 | **Aceptado:** 23/09/24 | **Publicado:** 06/11/24

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Caracterización del pensamiento matemático avanzado mediante el estudio del principio del palomar

Characterization of advanced mathematical thinking through the study of the pigeon loft principle

Caracterização do pensamento matemático avançado através do estudo do princípio do pombo-correio

DOI: https://doi.org/10.21803/penamer.17.35.794

José Gregorio Solorzano-Movilla
https://orcid.org/0000-0002-4176-0300
Doctorante en educación matemática
Docente de carrera de la Escuela Superior de Administración Pública (ESAP).
Barranquilla (Colombia).
E-mail: jose.solorzanom@esap.edu.co.

Wendy Loraine De León Zamora
https://orcid.org/0000-0003-4536-1988
Magíster en Educación Matemática. Docente de carrera de la Escuela Superior de Administración Pública (ESAP). Barranquilla (Colombia).
E-mail: wendy.deleon@esap.edu.co.

Resumen

Introducción: La formación de profesores ha tomado una especial relevancia, dada la constante necesidad de conectar los aprendizajes con los contextos de las nuevas generaciones, más aún con el auge de los avances tecnológicos, donde la matemática juega un rol fundamental. Ante esta situación, se plantea un interrogante: ¿Cuáles son los conocimientos matemáticos que se deben enseñar en la escuela? **Objetivo:** Identificar la necesidad de fortalecer la formación de los profesores de matemáticas, robusteciendo las conexiones inversas entre la matemática avanzada y la matemática escolar, como un elemento que permitirá un mejor desarrollo de actividades tendientes a desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes. Tomando como base los planteamientos de Tall (1991), y haciendo uso de la estrategia de resolución de problemas propuesta por Mason et al. (2010). **Metodología:** Este trabajo es de enfoque cualitativo, enmarcando el experimento de enseñanza, basada en la resolución de problemas no rutinarios relacionados con el principio del palomar. **Resultados:** caracterización del pensamiento matemático avanzado (PMA) en estudiantes de últimos semestres de un programa de licenciatura en matemáticas, se evidencia dificultad en la interpretación de problemas y planteamientos de conjeturas, destacando el uso de elementos geométricos como base de las demostraciones.

Palabras clave: Caracterización; Didáctica de las matemáticas; Enseñanza superior; Pensamiento matemático.

Abstract

Introduction: Teacher training has taken on special relevance, given the constant need to connect learning with the contexts of the new generations, even more so with the boom in technological advances, where mathematics plays a fundamental role. Given this situation, a question arises: What mathematical knowledge should be taught at school? **Objective:** To identify the need to strengthen the training of mathematics teachers, strengthening the inverse connections between advanced mathematics and school mathematics, as an element that will allow a better development of activities aimed at developing the mathematical thinking of students. Based on Tall's approaches (1991), and making use of the problem solving strategy proposed by Mason et al. (2010). **Methodology:** This work has a qualitative approach, framing the teaching experiment, based on the resolution of non-routine problems related to the pigeon loft principle. **Results:** Characterization of advanced mathematical thinking (AMT) in students in their last semesters of a bachelor's degree program in mathematics, showing difficulties in the interpretation of problems and conjectures, highlighting the use of geometric elements as a basis for demonstrations.

Keywords: Characterization; Didactics of mathematics; Higher education; Mathematical thinking.

¿Cómo citar este artículo?

Solorzano-Movilla; J. y De León; W. (2024). Caracterización del pensamiento matemático avanzado mediante el estudio del principio del palomar. *Pensamiento Americano, e#:794* 17(35), DOI: https://doi.org/10.21803/penamer.17.35.794

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons "Reconocimiento No Comercial Sin Obra Derivada".

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Resumo

Introdução: A formação de professores tem assumido especial relevância, dada a constante necessidade de conectar a aprendizagem com os contextos das novas gerações, ainda mais com o boom dos avanços tecnológicos, em que a matemática desempenha um papel fundamental. Diante dessa situação, surge uma pergunta: Que conhecimentos matemáticos devem ser ensinados na escola? **Objetivo:** Identificar a necessidade de fortalecer a formação de professores de matemática, reforçando as conexões inversas entre a matemática avançada e a matemática escolar, como um elemento que permitirá um melhor desenvolvimento de atividades voltadas para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. Com base nas abordagens de Tall (1991), e fazendo uso da estratégia de resolução de problemas proposta por Mason et al. (2010). **Metodologia:** Este trabalho tem uma abordagem qualitativa, enquadrando a experiência de ensino, com base na resolução de problemas não rotineiros relacionados com o princípio do pombal. **Resultados:** Caracterização do pensamento matemático avançado (AMT) em alunos dos últimos semestres de um curso de licenciatura em matemática, mostrando dificuldades na interpretação de problemas e conjecturas, destacando o uso de elementos geométricos como base para demonstrações.

Palavras-chave: Caracterização; Didática da matemática; Ensino superior; Pensamento matemático.

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons
"Reconocimiento No Comercial Sin Obra Derivada".

INTRODUCCIÓN

En los años recientes se han venido presentando modificaciones a los planes de estudios de los programas de licenciatura en matemáticas, en ese sentido, Solorzano (2023) muestra la forma en la cual la formación de los futuros profesores de matemáticas se ha estado enfocando en la llamada matemática escolar, dejando de lado elementos de las matemáticas avanzadas.

En ese aspecto, asignaturas como análisis matemático, topología, espacios métricos, análisis numérico, álgebra abstracta, teoría de grupos entre otros han sido apartados del componente obligatorio y en algunos casos son ofertados en las áreas llamadas electivas.

De acuerdo con Guacaneme (2017), existe un conjunto temático que permanece estable en la estructura curricular de los programas de licenciatura en matemáticas, este es el conformado básicamente por los fundamentos de matemáticas, geometría y los cálculos hasta las ecuaciones diferenciales, también estadísticas I (descriptiva) y estadística II (inferencial).

Esta situación deriva en una situación descrita por Wasserman (2021) y Zazkis y Leikin (2018) sobre el papel de las matemáticas avanzadas en la formación del profesor de matemáticas, al respecto las investigaciones de los citados autores se ponen de manifiesto dos situaciones, la primera, profesores en formación declaran que es más importante conocer específicamente sobre los temas que van a enseñar. La segunda está referida a la importancia del desarrollo de conceptualizaciones más profundas como argumentos para un mejor desempeño en el aula de matemáticas.

Por otro lado, Tall (1991) define dos tipos de pensamiento matemático, el elemental, el cual se desarrolla durante la educación básica hasta los primeros años de la media, y el avanzado característico de los últimos años de la secundaria hasta los estudios universitarios.

En ese orden de ideas, es posible establecer tres características actuales en la formación de los licenciados en matemáticas, la primera la disminución de los contenidos de matemáticas avanzadas en el plan de estudios, lo cual pone en práctica un currículo menos desafiante en cuanto al desarrollo del pensamiento matemático respecta.

En segundo lugar, la poca o nula integración de matemáticas coetáneas en la formación de los profesores de matemáticas, al mantenerse el componente del saber matemático estático no se integran los nuevos avances en la ciencia matemática, lo cual ubica al futuro profesional de la enseñanza distante de la frontera de conocimiento.

En tercer lugar, deja abierta una discusión respecto al conocimiento especializado del profesor de matemáticas, en específico al nivel de profundidad y de los saberes necesarios para abordar los contenidos y sus conexiones con otras ciencias, en especial como las matemáticas se articulan con la tecnología en temas de actualidad relacionados con este campo.

MARCO TEÓRICO/ MARCO REFERENCIAL

El interés por conocer los elementos característicos que diferencian las matemáticas avanzadas de

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons "Reconocimiento No Comercial Sin Obra Derivada".

aquellas que se consideran elementales, se sustentaron inicialmente en conocer, las formas en las que un matemático abordaba la solución de un problema.

En consonancia con lo anterior, en el año 1985 se conformó un equipo de trabajo dentro del Psicology Mathematics Education (PME), del cual hacían parte investigadores como David Tall, Tommy Dreyfus, Ed Dubinsky en otros, para estudiar la naturaleza del pensamiento matemático avanzado. Resultado de esta empresa, se publicó el libro llamado, Pensamiento Matemático Avanzado en el año 1991, bajo la edición de David Tall y que a la fecha aún sigue siendo el documento científico guía de las investigaciones relacionadas con el PMA.

Tall (1991) define el PMA, como aquel que se caracteriza por una gama de procesos cognitivos, como la generalización, la formalización y la abstracción. Los individuos que poseen este tipo de pensamiento son capaces de llevar a cabo procesos mentales complejos para entender y resolver problemas matemáticos.

A continuación, tomando como base los aportes de Tall (1991), Dreyfus (1990) y Dubinsky (1991) se presentan los elementos constitutivos de la teoría PMA. Se analizará desde la percepción y la acción, luego se revisarán los procesos del PMA.

La principal distinción entre el llamado "pensamiento matemático elemental" (PME) y el "pensamiento matemático avanzado" (PMA) es la complejidad y la capacidad de controlarla.

Para la teoría, los procesos más potentes son aquellos que permiten este control, en particular la representación y la abstracción, entendiendo la acción de abstraer como la manera de sustituir fenómenos concretos por "conceptos confinados a la mente humana" (Dreyfus, 1990).

Además, los autores definen dos tipos de procesos, los procesos matemáticos analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar, formalizar. El desarrollo de un PMA se hace evidente desde dos perspectivas, la primera cuando se resuelven problemas y la segunda cuando se logran realizar diferentes tipos de demostraciones. Un licenciado en matemáticas, con este nivel de destrezas, podrá diseñar tareas y actividades tendientes a que el estudiante potencie sus capacidades de razonamiento. Así mismo, el profesor responderá de una manera argumentada a las preguntas que pueden surgir en una clase.

Por otra parte, Cai y Lester (2016) menciona:

> La investigación sugiere claramente que la resolución de problemas (RP) no debe enseñarse como un tema separado en el currículo de matemáticas. De hecho, nos dice que enseñar a los estudiantes a usar estrategias generales de RP tiene poco efecto en su éxito como solucionadores de problemas." El autor hace un énfasis en este aspecto dada la práctica acostumbrada en desarrollo curricular de primero consolidar el concepto matemático en su totalidad antes de plantear problemas. En ese sentido, es posible encontrar estudiantes que, ante un problema matemático, responden "ese tema no lo he visto en clases. (p.3)

De igual forma plantea que, aunque no sabemos la mejor manera [si es que existe] de enseñar a los estudiantes a ser mejores resolutores de problemas, la investigación ha empezado [en los últimos 30 años] a mostrar evidencia sólida para apoyar algunos métodos frente a otros, uno de los métodos esbozados por Cai y Lester (2016) en alguna de sus investigaciones es del uso de problemas denominados desafiantes, o

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons "Reconocimiento No Comercial Sin Obra Derivada".

de alta demanda cognitiva según, Schoenfeld (1995). En ese sentido, es importante destacar la importancia que para los autores tiene abordar la matemática desde la resolución de problemas, dado que en palabras de Patricio Felmer (2016) "La resolución de problemas debería estar en el corazón de las clases de matemática, pues da la oportunidad de enriquecer la clase mediante el razonamiento y las habilidades de observación, inducción y deducción" (parr. 1).

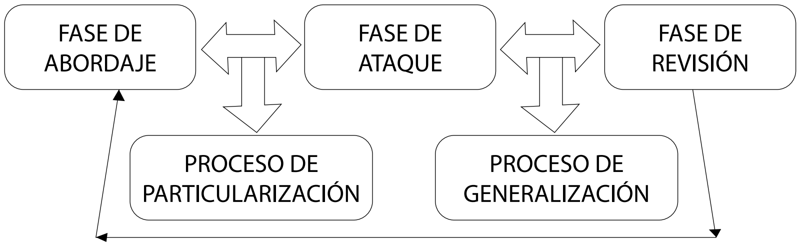
Al respecto, Losada (2023) menciona la importancia de abordar clases de matemáticas analizando como la resolución de problemas potenció a las matemáticas, dado que la historia de las matemáticas muestra la relación entre los conceptos matemáticas y los problemas que se buscaban resolver. Así mismo, destaca la importancia de esta perspectiva en la enseñanza, al evidenciar el componente experiencial de la matemática, en otras palabras, no una matemática perfecta si no una en continua construcción, con soluciones plausibles en la cual todos pueden aportar.

En cuanto a la RP como estrategia, Dewey (1916) decantó una estructura en la cual a partir de una serie de pasos era posible abordar problemas matemáticos, sin embargo, es con Polya (1970) en los años sesenta del siglo pasado donde toma mayor relevancia, en su obra How To Solve It describe que para resolver un problema se siguen los siguientes pasos, entender el problema, configurar un plan, ejecutar el plan y examinar la solución.

Sumado a lo anterior, se destacan los aportes a la resolución de problemas de Mason (2010) quienes establecen no solo una estructura, también ofrecen desde su perspectiva, una manera de alcanzar el desarrollo del pensamiento matemático, a partir de la experimentación, como se muestra en la figura 1.

Figura 1.

Esquema de resolución de problemas según Mason et al. (2010)



Fuente: Basados en Mason et al. (2010).

En ese orden de ideas, la intención subyacente en la propuesta de Mason et al. (2010) se enfoca en la forma en la cual es posible transitar desde los procesos de particularización hasta la generalización. En la revisión de la literatura es posible encontrar trabajos que toman estos planteamientos como apoyo para la caracterización del pensamiento matemático.

Además de lo mencionado anteriormente, es relevante destacar el principio del palomar, El primero que lo definió de manera formal fue el matemático alemán Dirichlet en el siglo XIX, aunque parece intuitivo y simple, es bastante usado en la resolución de problemas de diversa índole (González, 2016), plantea que:

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons "Reconocimiento No Comercial Sin Obra Derivada".

“Si n palomas ocupan m nidos, y n > m, entonces en un nido habrá al menos dos palomas”.

Existen una serie de situaciones en la cuales es útil, por ejemplo:

- Demuestra que en un grupo de 13 personas siempre hay 2 que cumplen años el mismo mes
- Supongamos que hay n personas en una reunión, y no todas se conocen entre sí. Demuestra que hay al menos dos personas que tienen el mismo número de conocidos.

También, se han logrado avances importantes en matemáticas haciendo uso del principio del palomar, como es el caso de teorema de Erdös-Szekeres:

“Sean n y m dos números naturales. Sea A una lista formada por los números naturales del 1 al (n-1) ·(m-1) +1 colocados en cualquier orden. Entonces podemos encontrar en A una subsucesión de n términos creciente o una subsucesión de m términos decreciente”. (Una subsucesión es otra lista formada al coger algunos elementos de la lista A en el mismo orden)

Por ejemplo, n=m=3. El conjunto A está formado por los números del 1 al 5. Una posibilidad sería: A = (2, 3, 1, 5, 4). ¿Es posible encontrar una subsucesión en A de 3 términos que sea decreciente? La respuesta es negativa.

¿Se puede encontrar una subsucesión en A de 3 términos que sea creciente? Sí, por ejemplo, se puede tomar (2, 3, 5), que se encuentran en dicho orden en A:

A = (2, 3, 1, 5, 4).

En este trabajo, se llevará cabo una aproximación a una caracterización de los procesos del PMA descritos por Tall (1991), mediante la implementación de una actividad en el aula y la cual hace parte de un sistema diseñado como parte de la investigación doctoral llamada “Progresos en la caracterización del pensamiento matemático avanzado mediante los espacios métricos en estudiantes de licenciatura en matemáticas”.

METODOLOGÍA

El estudio, es de tipo cualitativo, dada las características de investigación en el aula, fundamentado en el análisis de las respuestas que los estudiantes dan a los problemas propuestos, la observación y entrevistas no estructuradas.

Es una investigación basada en el diseño, mediante la estrategia investigativa llamada experimento de enseñanza, al respecto Briars et al. (2015) menciona:

> La investigación en educación matemática, especialmente basada en el diseño, puede contribuir significativamente a la mejora de los materiales educativos y la planificación de lecciones que fomenten la comprensión conceptual y la resolución de problemas, y la investigación puede ser una herramienta

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons "Reconocimiento No Comercial Sin Obra Derivada".

valiosa para evaluar y diseñar currículos que reflejen estas mejores prácticas. (p.24)

Por otro lado, Camargo (2021) plantea sobre “la estrategia del experimento de enseñanza, es útil cuando se quiere observar el proceso de aprendizaje matemático en vivo y analizar aspectos de este para ganar claridad sobre la naturaleza de los significados construidos por los estudiantes” (p.86).

La unidad de análisis estuvo conformada por los 25 estudiantes de un curso electivo, quienes matricularon libremente la asignatura, cabe destacar que este curso hace parte del piloto de la investigación doctoral “progresos en la caracterización del pensamiento matemático a través de los espacios métricos en estudiantes de licenciatura en matemáticas”. La elección de este curso electivo fue intencional respondiendo a los criterios de estar en noveno semestre y en práctica profesional.

Para la implementación se desarrolló en cuatro fases:

-Fase 1: diseño de la actividad, en la cual se escogieron los problemas relacionados con el principio del palomar.

-Fase 2: implementación de la actividad, espacio donde los licenciados en matemáticas en formación dieron respuesta a cada uno de los problemas, en grupos de máximo tres estudiantes.

-Fase 3: socialización de los resultados, momento de la clase donde los estudiantes explicaron y socializaron con sus compañeros las respuestas.

-Fase 4: análisis de resultados, mediante la triangulación de datos de acuerdo con Hernández-Sampieri (2018) tomando como categorías las determinadas por la metodología para resolución de problemas de Mason et al. (2010) junto con las características del PMA declaradas por Tall (1991) y Dreyfus (1990). Para articular las habilidades del pensamiento matemático avanzado con las etapas de resolución descritas, se consideraron aquellas donde es posible identificar fase abordaje, la cual se relaciona con los procesos de análisis y conjetura. De igual forma, con el ataque que se relaciona con definición y demostración, la de revisión con síntesis. Finalmente, la particularización con categorización y formalización con la generalización.

La actividad consistió en dar respuesta a los siguientes problemas:

1. ¿Cómo resolverías los siguientes problemas?

• Se escogen nueve puntos en el interior de un cuadrado de lado uno. Prueba que es posible escoger tres de ellos de tal forma que el área del triángulo que forman es menor o igual que 1/8

• Dadas seis personas en una fiesta, demuestre que necesariamente existen tres personas que se conocen mutuamente o tres personas que no se conocen mutuamente. Suponga que la relación de conocer es simétrica.

• Del conjunto A = {1, 2, 3,4, ..., 99, 100} escogemos 51 números. Prueba que, entre los 51 números escogidos, existen dos tales que uno es el múltiplo del otro.

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons "Reconocimiento No Comercial Sin Obra Derivada".

2. ¿Cómo demostrarías usando el principio de inducción matemática?

- $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$

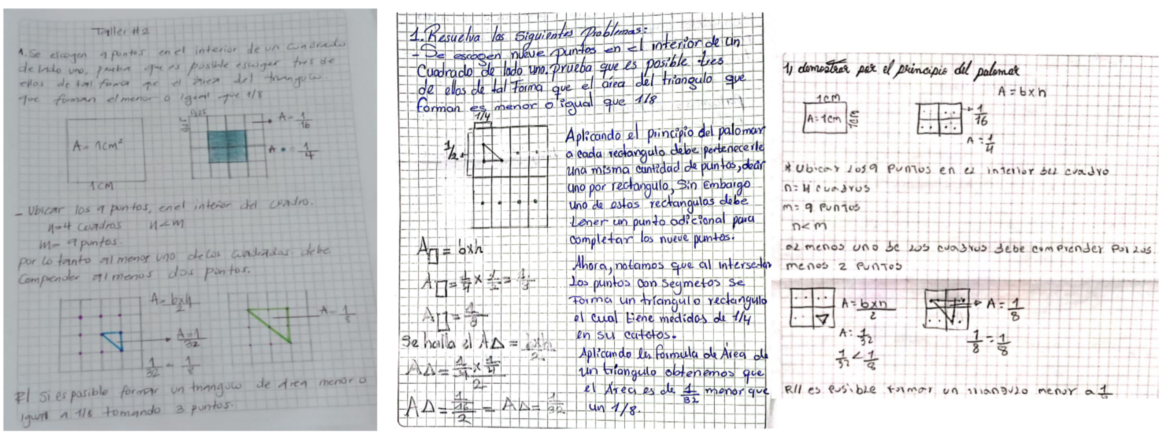
RESULTADOS

A continuación, se presentan los resultados de la experiencia, para este trabajo se considerarán los problemas 1,2 y 3 relacionados con el principio del palomar, el análisis se hizo a partir de soluciones que los estudiantes dieron, por escrito.

Soluciones problema 1:

Figura 2.

Soluciones problema 1



En las soluciones del problema 1, figura 2, se identificaron dos tipos de soluciones, la primera donde se divide el cuadrado en 16 partes iguales, cada uno de área 1/4, luego en cada intersección se colocan ocho puntos y el noveno se ubica en una posición cualquiera, sin embargo, en esos casos la solución no es argumentada.

La segunda, se divide el cuadrado en ocho rectángulos, de base 1/4 y altura 1/2 en cada uno se ubica un punto, con lo cual hay uno en el cual se hallen dos puntos, si se colocan los puntos en los vértices de dos rectángulos contiguos, uno con un punto y otro con dos puntos, formando un triángulo rectángulo, se encuentra que este será el de máxima área con valor de $1/8\ cm^2$. Cabe destacar que, en este problema, todos los grupos intentaron dar una solución.

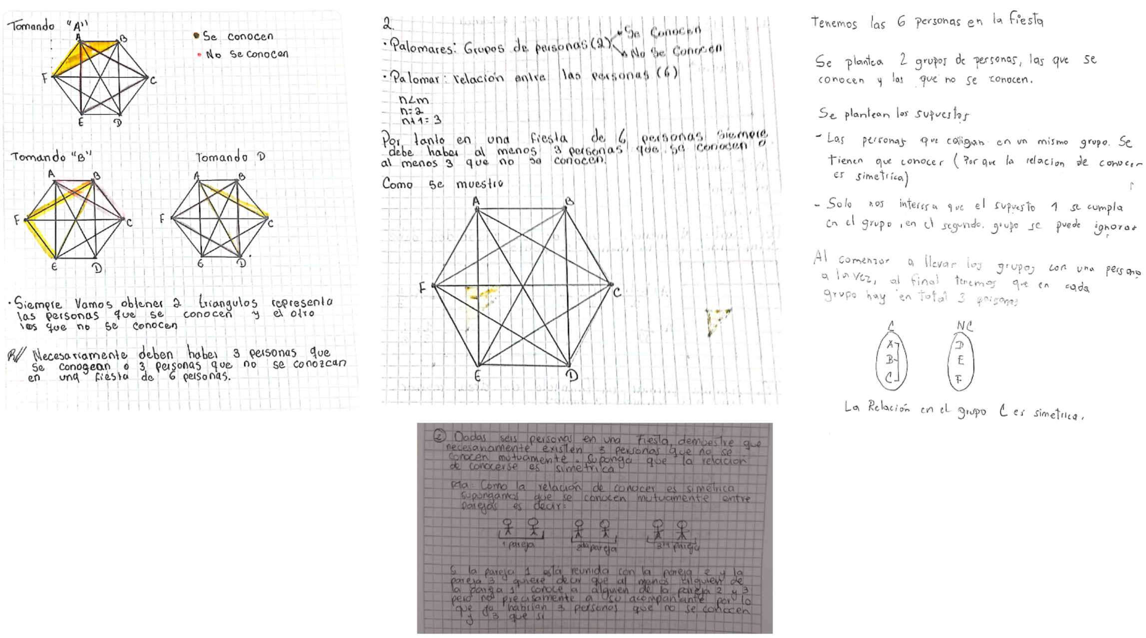
Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons "Reconocimiento No Comercial Sin Obra Derivada".

En relación con los planteamientos de Tall (1991) para las habilidades del pensamiento matemático avanzado, en ambos tipos soluciones se encontró:

- Analizar, conjeturar: en las soluciones escritas no se evidencian propuestas de conjeturas. Tratan de llegar al valor 1/8, colocando los puntos en los vértices de los cuadrados resultantes de la división del cuadrado del lado 1.
- Definir, demostrar: las soluciones presentadas toman las construcciones geométricas como la demostración.
- Sintetizar: no se evidencia síntesis.
- Categorizar: no evidencian elementos de categorización.
- Generalizar, formalizar: no se evidencian elementos que conduzcan a una generalización.

Soluciones problema 2:

Figura 3.
Soluciones problema 2



Fuente: Elaboración propia tomando los resultados de los estudiantes

En las soluciones del problema 2, es posible identificar tres maneras de abordarlo; la primera consistente en el diseño de una representación visual de la relación simétrica; la segunda haciendo uso de la representación sagital de conjuntos y; la tercera a modo de casillas donde se esquematiza a las parejas, sin embargo, no se llega a respuestas plausibles. Un aspecto relevante, es que el 33% de los grupos no dieron respuesta a este problema.

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

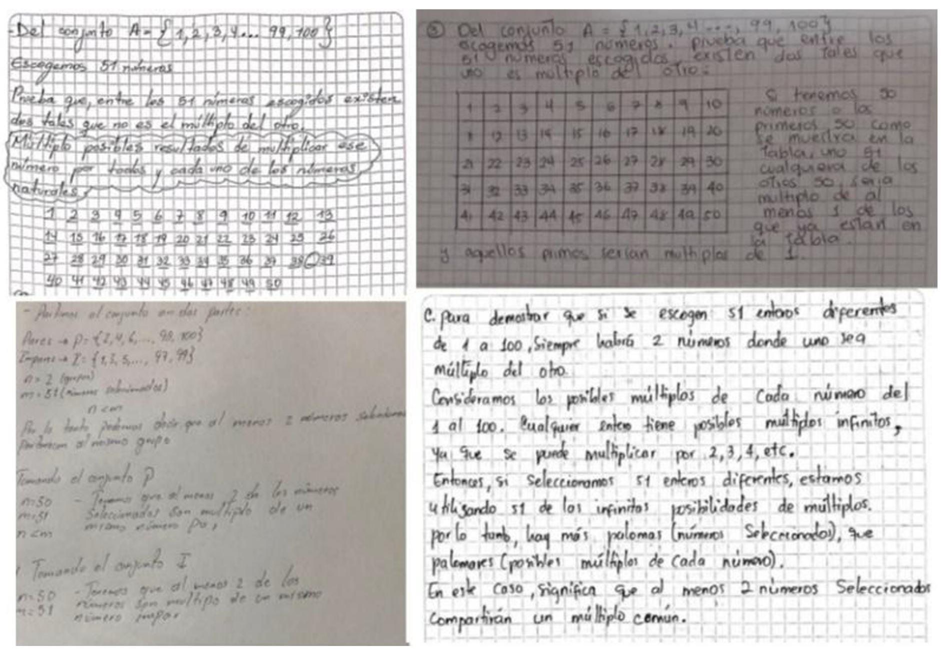
Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons "Reconocimiento No Comercial Sin Obra Derivada".

Haciendo el análisis desde las habilidades del pensamiento matemático avanzado:

- Analizar, conjeturar: en una de las soluciones se habla de establecer unos supuestos, en este caso, las personas se conocen.
- Definir, demostrar: las soluciones presentadas toman las construcciones geométricas como la demostración, en particular, identificar triángulos semejantes para determinar la respuesta.
- Sintetizar: no se evidencia síntesis.
- Categorizar: no evidencian elementos de categorización.
- Generalizar, formalizar: no se evidencian elementos que conduzcan a una generalización.

Soluciones problema 3:

Figura 4.
Soluciones problema 3



Fuente: Elaboración propia tomando los resultados de los estudiantes

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons "Reconocimiento No Comercial Sin Obra Derivada".

Finalmente, en lo referente al tercer problema, se tienen cuatro tipos de respuestas, tres de estas relacionadas con el principio del palomar, mientras que una está explicada desde una manera que podría llamarse intuitiva.

Las cuatro respuestas son plausibles, destacando que todos los grupos intentaron dar una respuesta. Desde el punto de vista de las habilidades del pensamiento matemático avanzado:

- Analizar, conjeturar: en las soluciones escritas no se evidencian propuestas de conjeturas, hacen uso de conocimientos previos sobre números pares e impares y tratan de articular con el principio del palomar.
- Definir, demostrar: las soluciones presentadas toman las construcciones geométricas como la demostración.
- Sintetizar: no se evidencia síntesis.
- Categorizar: no evidencian elementos de categorización.
- Generalizar, formalizar: no se evidencian elementos que conduzcan a una generalización.

DISCUSIÓN

En esta sección, se muestra el análisis a partir de la triangulación de los datos obtenidos a la luz de los aspectos teóricos versados en la introducción del presente trabajo, a saber, pensamiento matemático avanzado, resolución de problemas desde la perspectiva de Mason et al. (2010).

Tabla 1.
Triangulación de los datos obtenidos

Categorías PMA	RP	Soluciones de los estudiantes	Síntesis
Analizar, conjeturar	Abordaje	en el 75% de los problemas los estudiantes, evidencian análisis y el planteamiento de conjeturas, en especial en aquellos donde es posible establecer una visualización geométrica.	En este aspecto es posible establecer la importancia de la visualización como un proceso importante para la resolución de problemas.
Definir, demostrar	Ataque	En el 60% de los trabajos se logró evidenciar que los estudiantes logran alcanzar niveles demostrativos	En este aspecto es posible denotar cómo actúa el miedo al error, lo cual limita el carácter experimental de la resolución de los problemas.
sintetizar	Revisión	En el 30% de los trabajos se evidencia que hubo una revisión de las soluciones que conllevarán a una síntesis y a establecer conexiones del concepto matemático.	En relación con lo anterior, es posible notar que en varios casos se dieron respuestas que no fueron verificadas.
categorizar	Particularización	En el 80% de los casos fue posible notar procesos de categorización	Se denota un alto grado de comprensión de la situación.
generalizar, formalizar	Generalización	El 20% logró generalizar.	En relación con la generalización, se evidencia que existen aún elementos subyacentes que obstaculizan el proceso, en especial cuando no se tiene la posibilidad de llevarlo a una visualización gráfica.

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons "Reconocimiento No Comercial Sin Obra Derivada".

De acuerdo con la triangulación disponible en la tabla 1, se destacan algunos aspectos, en primer lugar, las dificultades para abordar problemas en los cuales no es posible establecer una visualización, específicamente de carácter geométrico, como se muestra en la figura 1 cuando se hace factible una representación de este tipo, se identificaron más formas de abordaje en comparación con aquellas en las cuales la parte visual no es explícita.

En segundo lugar, en relación con los planteamientos de Tall (1991) respecto a que el PMA es propio de la etapa universitaria, es decir en ese nivel de formación los procesos de particularización-generalización, sin embargo, parece ser que esto no se presenta siempre.

En ese sentido, en eventos importantes, como el CERME (Congreso Europeo De Educación Matemática) e ICME (Congreso Internacional de Educación Matemáticas) se vienen desarrollando mesas de trabajo que aborda especialmente la educación matemática en el nivel terciario, con el fin de analizar a mayor profundidad las situaciones propias del aprendizaje de las matemáticas en la educación superior.

CONCLUSIONES

A modo de conclusión, el pensamiento matemático avanzado no se da necesariamente en la educación superior, en especial en lo referente a los procesos de generalización relacionados con la demostración y la resolución de problemas, prueba de esto, son los resultados del presente estudio, tomando como eje central los planteado por Tall (1991), los estudiantes de la unidad de análisis, deberían denotar capacidad de resolver problemas y habilidad para realizar demostraciones, de igual forma con el proceso de generalización y formalización. En varios casos se pudo evidenciar dificultades para interpretar el problema, así mismo para el planteamiento de conjeturas.

Al respecto, Losada (2001) plantea que uno de los logros de los programas de la Olimpiadas Colombianas de Matemáticas, es el hecho de notar avances en el pensamiento avanzado de los estudiantes, jóvenes en edad escolar, con lo cual se pone de manifiesto que no hace falta que un concepto matemático esté perfeccionado en su enseñanza, para resolver un problema.

Por otro lado, la disminución del componente de matemáticas avanzadas de los programas de estudio de la licenciatura en matemáticas objeto del estudio, conllevando a tener un currículo basado en elementos poco desafiantes, incidiendo de una forma u otra en la dimensión definida por Wasserman (2021) como el horizonte matemático, entendiendo este como la relación entre los conceptos de la matemática avanzada y la matemáticas escolar, que permiten un mejor desempeño de los profesores en cuanto al diseño de tareas, actividades y respuestas de los estudiantes a cargo en su ejercicio profesional. Al respecto Gamboa et al. (2015) mencionan:

El profesor es el que utiliza su conocimiento, no solo de la matemática sino también de la enseñanza, de los estudiantes y del currículo, para identificar conexiones que se podrán hacer explícitas al preparar tareas, al implementarlas y al gestionar las discusiones que se producen en el aula. Si bien en los primeros enfoques la dificultad recae solo en el dominio del conocimiento matemático implícito, en los últimos la dificultad recae también en el conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje. (p. 4)

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons "Reconocimiento No Comercial Sin Obra Derivada".

En ese sentido, es relevante no solo el fortalecer los aspectos sobre el aprendizaje de las matemáticas, también lo referente al fortalecimiento del saber matemático, en este caso lo concerniente al pensamiento matemático avanzado.

De igual forma, en la misma de los planteado por Cai y Lester (2016), se hace necesario reflexionar en cuanto al papel de la resolución de problemas en el currículo, teniendo en cuenta la tradición de formalizar un concepto matemático antes de iniciar abordar la RP, en ese sentido, las investigaciones del citado autor destacan que integrar la RP durante el proceso de enseñanza-aprendizaje está dando evidencias de una mayor eficacia.

Finalmente, se hace pertinente reflexionar sobre el papel de la madurez del pensamiento matemático en un licenciado en matemáticas y el rol de este proceso en la práctica profesional, como una manera de visionar las matemáticas como una formalización de la experiencia humana a través de los procesos de resolución de problemas, en contraste a la visión basada en el explicación de contenidos, desde este punto de vista, hacer matemáticas es una capacidad que todas las personas pueden llevar a cabo y que puede co-adyuvar en la resolución de problemas de diversa índole, en especial en lo que respecta en el desempeño profesional. En palabras de Burton (1994), el objetivo de la formación en matemáticas es desarrollar el pensamiento matemático y para esto se hace necesario que los educadores matemáticos logren ponerse de acuerdo en lo realmente importante en el momento de abordar la enseñanza de las matemáticas, para que los árboles nos dejen ver el bosque.

Conflictos de interés

No existen conflictos de intereses.

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons "Reconocimiento No Comercial Sin Obra Derivada".

REFERENCIAS

Briars, D. J., Larson, M., Strutchens, M. E. & Barnes, D. (2015). A Call for Mathematics Education Colleagues and Stakeholders to Collaboratively Engage with NCTM: In Response to Martin's Commentary. *Journal of Urban Mathematics Education, 8*(2). 23-26. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1086197.pdf

Burton, L. (1994). Clashing Epistemologies of Mathematics Education: can we see the 'wood'for the 'trees'? *Curriculum Studies, 2*(2), 203-219. https://doi.org/10.1080/0965975940020204

Cai, J. &. Lester, F.K (2016). Can Mathematical Problem Solving Be Taught? In P. Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick, (Eds.). *Posing and Solving Mathematical Problems. Springer.* https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-28023-3

Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática.* Recursos para la captura de información y el análisis. Editorial Universidad de Antioquia. http://repository.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/17880/1205-parcial-estrategias-cualitativas.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Dewey, J. (1916). *Democracy and education.* The Macmillan Company. http://140.211.62.101/dewey/contents.html

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 113–134). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139013499.008

Dubinsky Ed, (1991). Advanced Mathematical Thinking and the Computer, In D. O. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking, Kluwer: Holland,* 231-248.

Felmer, E. (2016, 1 de agosto). *Felmer: "la resolución de problemas debe estar en el corazón de las clases de matemáticas".* Centro de investigación avanzada en educación. Universidad de Chile. https://ciae.uchile.cl/noticia/felmer-la-resolucion-de-problemas-debe-estar-en-el-corazon-de-las-clases-de-matematicas.

Gamboa, G. D., Badillo, E. & Ribeiro, M. (2015). El horizonte matemático en el conocimiento para la enseñanza del profesor: geometría y medida en educación primaria. PNA. *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática. 10*(1). 1-24. https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/6093

González, C. (2016) Principio del palomar. *Estímulo del talento matemático* (2015-2016). Universidad Politécnica de Madrid. https://matematicas.uam.es/~eugenio.hernandez/Estalmat-Materiales/CarlosGonzalez/2015-10-24-CG-Principio%20del%20Palomar.pdf

Guacaneme-Suárez, E A., Obando-Zapata. G. & Garzón, D. (2017). Colombia: Mathematics education and the preparation of teachers. Consolidating a professional and scientific field. *Mathematics Teacher Preparation in Central America and the Caribbean Springer Briefs in Education. Springer.* https://doi.org/10.1007/978-3-319-44177-1_2

Hernández-Sampieri, R. & Mendoza, C. (2018). Metodología de la investigación. *Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta.* Editorial Mc Graw Hill Education.

Losada, M. (2001). *Olimpiadas de Matemáticas: Retos, Logros* (y Frustraciones). Boletín de la Asociación Matemática venezolana, VIII (1). https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol8/mlosada.pdf

Losada, M. (2023). *Notas de clases Seminario Pensamiento Matemático.* Doctorado en Educación Matemático. Bogotá. Inédito.

Mason, J., Burton, L. & Stacey K, (2010). *Thinking Mathematically.* (2da Ed.). Pearson.

Polya, G. (1970). *How to solve it.* Editorial Trillas.

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. *Journal of Education, 196*(2), 1-38. https://doi.org/10.1177/002205741619600202

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons "Reconocimiento No Comercial Sin Obra Derivada".

Solorzano J. (2023, 16, 17 y 18 de febrero). Una reflexión sobre la pertinencia del pensamiento matemático avanzado en la formación de los profesores de matemáticas y su relevancia en la práctica docente. *III Simposio de Matemática y Educación Matemática, el XII Congreso Internacional de Matemática asistida por Computador y el III Simposio de Competiciones Matemáticas.* Volumen 10, No. 2 - MEM2023. http://investigacion.uan.edu.co/images/MEM/documentos/ActaVolumen10N%C2%B02-2023.pdf

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking.* Kluwer: Holland, 3-21.

Wasserman, N. (2021). Abstract Algebra for Algebra Teaching: Influencing School Mathematics Instruction. *Journal of Mathematical Behavior.* 16, 28 – 47. https://doi.org/10.1080/14926156.2015.1093200

Zazkis, R. & Leikin, R. (2018). Advanced mathematical Knowledge: How is it used in teaching? *In The Sixth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* - CERME-6

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons "Reconocimiento No Comercial Sin Obra Derivada".